

---

 Διάλεξη 4η
 

---

## ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

## Ορισμοί.

(i) Για  $a \in \mathbb{R}$ , η συνάρτηση  $H_a : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$  με

$$H_a(t) := \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & a \leq t, \end{cases}$$

καλείται συνάρτηση μοναδιαίου βήματος.

(ii) Για  $S \subset \mathbb{R}$ , η συνάρτηση

$$\chi_S(t) := \begin{cases} 1, & t \in S \\ 0, & t \in S^c, \end{cases}$$

καλείται χαρακτηριστική συνάρτηση (του συνόλου  $S$ ).

(iii) Η συνάρτηση

$$H(t) := \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/2, & t = 0 \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

καλείται συνάρτηση Heaviside.

$$s e^{-sa}, \quad s > 0.$$

(ii) Για τούς μετασχηματισμούς Laplace των χαρακτηριστικών συναρτήσεων των διαστημάτων  $[a, b]$ ,  $(a, b]$ ,  $(a, b)$ ,  $[a, b)$ ,  $(-\infty < a < b < \infty)$  έχουμε

$$\mathcal{L}[\chi_{[a,b]}](s) = \mathcal{L}(\chi_{(a,b)})(s) = \mathcal{L}[\chi_{(a,b)}](s) = \mathcal{L}(\chi_{[a,b)})(s) = \frac{e^{-sa} - e^{-sb}}{s}, \quad s > 0.$$

(iii) Για τούς μετασχηματισμούς Laplace των χαρακτηριστικών συναρτήσεων των συνόλων  $[a, \infty)$ ,  $(a, \infty)$ ,  $(a \in \mathbb{R})$  έχουμε

$$\mathcal{L}[\chi_{[a,\infty)}](s) = \mathcal{L}[\chi_{(a,\infty)}](s) = \mathcal{L}[H_a](s) = \frac{1}{s} e^{-sa}, \quad s > 0.$$

## Απόδειξη.

## Παρατηρήσεις - Παραδείγματα

**ΠΡΟΤΑΣΗ 4.2** Αν  $a > 0$  είναι μία πραγματική σταθερά και  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  πραγματική συνάρτηση της οποίας ο μετασχηματισμός Laplace ορίζεται για όλα τα  $s > s_0$ , τότε η συνάρτηση

$$f_a(x) := \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a, \\ f(t-a), & a \leq t. \end{cases}$$

μετασχηματίζεται κατά Laplace και είναι

$$\mathcal{L}[f_a](s) = e^{-as}\mathcal{L}[f](s), \quad s > s_0.$$

**Απόδειξη.**

### Παρατηρήσεις - Παραδείγματα

**ΘΕΩΡΗΜΑ 4.3** (Lerch) Αν  $f, g : \rightarrow [0, \infty)$  είναι δύο κατά τμήματα συνεχείς συναρτήσεις για τις οποίες οι  $L[f] = L[g]$  ορίζονται για  $s > s_0$  και είναι

$$L[f](s) = L[g](s), \quad s > s_0,$$

τότε θα είναι  $f(x) = g(x)$  για όλα τα  $x \geq 0$  στα οποία οι  $f, g$  είναι συνεχείς.

**Απόδειξη.** ΟΧΙ

**ΠΟΡΙΣΜΑ 4.3.α** Αν  $f, g$  είναι συνεχείς συναρτήσεις για τις οποίες οι  $L[f] = L[g]$  ορίζονται για  $s > s_0$  και είναι

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[g](s), \quad s > s_0,$$

τότε θα είναι  $f(x) = g(x)$  για όλα τα  $x \geq 0$ .

### Σχόλια - Παραδείγματα

### 1ο TEST